Επαναληπτικά Θέματα, Απειροστικός Λογισμός 1

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1
Να αποδείξετε ότι

$$\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) > \frac{1}{2x+1},\ \forall\ x>0.$$

Θέμα 2

i) Να αποδείξετε ότι

$$\left[\sqrt{n^2+2n}\right] = n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

ii) Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{C} = \{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] :\ n \in \mathbb{N}\}$. Να βρείτε τα $\sup \mathcal{C}$ και $\inf \mathcal{C}$.

Θέμα 3
Δίνεται ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_n x_{2n}$, $\lim_n x_{2n+1}$, $\lim_n x_{n^2}$ και είναι πεπερασμένα, να αποδείξετε ότι το όριο $\lim_n x_n$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Θέμα 4
Δίνεται περιοδική συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Θέμα 5
Δίνεται ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\sqrt[n]{x_n^3} \xrightarrow{n} 3$. Αποδείξτε ότι:

i) $(x_n)^{1/n^3} \xrightarrow{n} 1$.

ii) $x_n \xrightarrow{n} +\infty$.

Θέμα 6
Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^2(x) = 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 7
Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)\big) = 0.$$

Θέμα 8
Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 9
Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Only Maths
-Official-

i) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=2$, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=2$.

ii) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^{2021}}=+\infty$.

Θέμα 10

i) Έστω $c>0$ και μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\geq c,\ \forall\ x\geq 1$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ii) Σε περίπτωση που το $c=0$, αιτιολογήστε μέσω παραδείγματος ότι δεν ισχύει πάντα το συμπέρασμα του ζητήματος (i).

Θέμα 11

Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\leq\inf_{x\in\mathbb{R}}|g'(x)|.$$

Αποδείξτε ότι

$$|f(x)-f(y)|\leq|g(x)-g(y)|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}\,.$$

Θέμα 12

i) Δίνεται φθίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n}(x_{n+1}+x_n)=0$. Αποδείξτε ότι $x_n\xrightarrow{n}0$.

ii) Έστω $M>0$ και μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών με

$$|x_{n+1}-x_n|\leq M\cdot 3^{-n},\ \forall\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Να αποδείξετε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Θέμα 13

Δίνεται φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$2x_{n+1}\leq x_n+x_{n+2},\ \forall\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n:=x_{n+1}-x_n,\ n\in\mathbb{N}$ συγκλίνει και μάλιστα το όριό της είναι ίσο με μηδέν.

Θέμα 14

Δίνεται συνάρτηση $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]} & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$$

Να δείξετε η f είναι συνεχής στο 0 και όχι συνεχής στο $\dfrac{1}{2}$.

Θέμα 15

Δίνεται συνεχής και περιοδική συνάρτηση $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με περίοδο $T>0$. Να δείξετε $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0+\frac{T}{2}\right)=f(x_0)$.

Only Maths -Official-

Θέμα 16

Έστω συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

όπου $g\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ κάποια συνάρτηση. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $g(x) = 0,\ x \notin \mathbb{Q}$.

Θέμα 17

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \ \text{ και } \ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα 18

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(e^x + 1),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Αποδείξτε ότι

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Θέμα 19

i) Αποδείξετε ότι: $x + 1 \le e^x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση.

(a) Έστω τυχαία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Αποδείξετε ότι οι ακολουθίες

$$y_n = \frac{1 + |x_n|}{e^{|x_n|}},\ n \in \mathbb{N} \text{ και } z_n = \frac{1}{f(y_n)},\ n \in \mathbb{N},$$

έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες.

(b) Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$\left(f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

είναι συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό.

Θέμα 20

Υπολογίστε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{(2n)^2}$ και

ii) $\displaystyle\lim_n \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{(2n-1)^2}$

Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Να υπολογίστε τα $\limsup x_n$ και $\liminf x_n$.

Θέμα 21
Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ με $f(1) < f(0) < f(3) < f(2)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,3)$ με $f''(\xi) = 0$.

Θέμα 22

i) Αποδείξτε ότι: $\ln x \leq x-1,\ \forall\ x>0$.

ii) Δίνεται συνάρτηση $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

Να δείξετε η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, φθίνουσα στο $(0,1)$ και υπολογίστε την $f'(1)$.

Θέμα 23
Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$-3 < f(x) < 0,\ \forall x \in [0,1].$$

Αποδείξτε ότι

i) υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $\sqrt{10\xi} = -f(\xi)$

ii) υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $f(x) + \sqrt{10x} + 3 \geq \lambda,\ \forall x \in [0,1]$.

Θέμα 24
Δίνεται γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ με $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Θέμα 25
Έστω $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_n \frac{n!}{3^n} f\left(\frac{3^n}{n!}\right) = 0.$$

Θέμα 26
Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Να υπολογίσετε τα $\limsup x_n$ και $\liminf x_n$.

Θέμα 27
Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon [a,\beta] \to \mathbb{R}$ με $f'(a) < 0 < f'(\beta)$. Αποδειξτε ότι η f λαμβάνει

Only Maths
-Official-

ελάχιστη τιμή στο (a, β) και όχι στα άκρα του.

Θέμα 28
Δίνεται συνάρτηση $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

i) Σε ποιά σημεία η f είναι συνεχής;

ii) Σε ποιά σημεία η f είναι παραγωγίσιμη;

iii) Βρείτε την παράγωγο της f σε όποια σημεία αυτή, υπάρχει.

Θέμα 29
Έστω $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$ και ας είναι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $x_n < a < y_n,\ \forall\ an \in \mathbb{N}$. Αν $x_n, y_n \overset{n}{\to} a$ αποδείξτε ότι

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \overset{n}{\to} f'(a).$$

Θέμα 30
Έστω $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και στο $(0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, +\infty)$ με $f'(\xi) = 0$.

Θέμα 31
Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right),\ x > 1.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $f(\xi_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 32
Εξηγήστε το λόγο που ο κανόνας L' Hospital δεν μπορεί να εφαρμοσθεί για τον υπολογισμό των ορίων

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)}{e^{-x}(\sin x + \cos x)}.$$

Στη συνέχεια υπολογίστε (αν υπάρχουν) τα παραπάνω όρια.

Θέμα 33
Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $y > 0$. Αποδείξτε ότι

$$xy \le e^x + y(\ln y - 1).$$

Θέμα 34
Δίνεται το σύνολο

$$A = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m + n \le 10\right\}.$$

Να αποδείξετε ότι $\sup A = 9$ και $\inf A = \dfrac{1}{9}$.

Only Maths
-Official-

Θέμα 35

i) Εστω μια ακολουθία Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μία τυχαία ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Αποδείξτε ότι και η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.

ii) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες Cauchy. Αποδείξετε ότι η ακολουθία

$$d_n = |x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει.

Θέμα 36
Δίνεται η συνάρτηση $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 3x^2 + e^{\sin x}, x \in \mathbb{R}\,.$$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή $(f^{-1})'(1)$.

Θέμα 37
Έστω $a > 0$ και δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, a)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}.$$

Θέμα 38
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\arctan x - \frac{x}{x^2+1} = a,$$

έχει ακριβώς μία ρίζα αν $|a| < \frac{\pi}{2}$ και δεν έχει ρίζα αν $|a| \geq \frac{\pi}{2}$.

Θέμα 39
Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $p > 1$ αποδείξτε ότι:

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

Θέμα 40
Δίνεται φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $M = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

i) Δείξτε ότι $\limsup x_n \leq M$.

ii) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για την οποία $\limsup x_n < M$.

iii) Δείξτε ότι, αν ισχύει $x_n \neq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\limsup x_n = M$.

Only Maths -Official-